Curvatura e simetría

Eduardo García Río

Excelentísimo Señor Presidente,
Excelentísimos Señores e Señoras Académicos,
Señoras e señores:

Comparezo hoxe aquí ante vostedes para impartir o meu discurso de ingreso nesta Real Academia.

Quero que as miñas primeiras palabras sexan de agradecemento para a Real Academia Galega de Ciencias pola honra que me dispensa acolléndome entre os seus membros.

Un nomeamento que ten numerosos antecesores ilustres, comezando polos Académicos fundadores, o profesor Eduardo García-Rodeja Fernández e o profesor Enrique Vidal Abascal, sendo este último o primerio Presidente da RAGC. Especialmente emotivas son as figuras dos profesores Gerardo Rodríguez López (académico supernumerario) e Luis Ángel Cordero Rego, aos que tiven a sorte de ter como profesores na Facultade de Matemáticas da USC. Asemade quero amosar o meu máis profundo respecto polos académicos correspondentes Manuel de León Rodríguez, Francisco Marcellán Español e Lieven Vanhecke, recentemente falecido e con quen mantiven unha estreita relación investigadora. Os profesores Wenceslao González Manteiga e Juan José Nieto Roig, académicos numerarios da RAGC son referentes na investigación matemática, tanto no eido da estatística coma no das ecuacións diferenciais.

Tende por certo que levarei con orgullo e responsabilidade a condición de Académico. Tratarei de prestixia-la institución e, dende ela, contribuír a impulsa-la ciencia, a investigación, e o progreso social, económico e tecnolóxico de Galicia.

A miña vida transcorreu estreitamente relacionada coa Universidade de Santiago de Compostela, onde cursei a Licenciatura e me doutorei en Matemáticas no ano 1992. Pero xa con moita anterioridade estudei os dous primeiros cursos de Educación Primaria (a antiga EGB) no Colexio López Ferreiro, Anexo á Escola de Maxisterio no Pazo de Fonseca. Recordo ter gozado dos recreos xogando ao baloncesto no claustro e os patios do que dende fai tempo é o Reitorado da Universidade de Santiago de Compostela. Tras unha breve estadía na Universidade da Coruña, a miña actividade docente e investigadora desenvolveuse sempre na Universidade de Santiago de Compostela, primeiro na área de Análise Matemática e, dende o inicio deste século, na área de Xeometría e Topoloxía. Dende este punto de vista son certamente un ser profundamente *endogámico*, algo do que non podo senón sentirme orgulloso a pesar das connotacións negativas que dende hai anos se lle atribúe a dito cualificativo.

A continuación describirei brevemente algúns dos temas da miña investigación, que sempre tivo como eixo central o estudo da curvatura, primeiro dende unha perspectiva máis alxébrica e máis recentemente dende un punto de vista máis analítico, de xeito que se encadra no que a día de hoxe se denomina *Análise Xeométrica*. En tódolos problemas abordados a simetría constitúe un aspecto central que interactúa co comportamento da curvatura. Neste discurso tentarei trazar un breve percorrido por algúns destes aspectos. Permítanme, non obstante, que intercale entre eles algunhas consideracións persoais que considero relevantes, botando unha ollada ao pasado pero, sobre todo, coa vista posta no futuro.

Agradecementos

Ao longo da miña carreira sempre fun partidario do traballo en equipo co ánimo de abordar problemas complexos e relevantes con maiores expectativas de éxito. Vaia por diante o meu agradecemento a tódolos colegas de diversas partes do mundo con quen teño colaborado dende xa hai máis de 30 anos. Igualmente importantes teñen sido as contribucións dos investigadores en formación cos que tiven oportunidade de compartir ilusións (e certamente desilusións e fracasos) e aos que sempre tentei de inculcar a paixón pola ciencia. É unha satisfacción persoal que a relación mais alá do traballo investigador teña revertido nunha amizade entrañable.

Non podo deixar de mencionar aos meus directores de tese, os profesores Agustín Bonome Dopico e Luis M. Hervella Torrón, quen foron responsables dos meus primeiros pasos como investigador na Universidade de Santiago de Compostela.

Igualmente relevantes na miña carreira foron os seguintes profesores de universidades estranxeiras cos que mantiven unha estreita colaboración e que, dun xeito ou outro, contribuíron a formar o investigador que son hoxe en día.

L. Vanhecke
K. U. Leuven

D. N. Kupeli
METU

Y. Matsushita
Kyoto Univ.

J. F. Escobar
Cornell Univ.

P. Gilkey
Univ. Oregon

O profesor Lieven Vanhecke desempeñou un papel esencial no meu interese pola curvatura e distintos problemas de homoxeneidade dende a miña etapa predoutoral. O profesor Demir Kupeli introduciume no estudo da xeometría de Lorentz e a súa relación coa Relatividade Xeral. Colaborei co profesor Yasuo Matsushita no estudo de obstrucións topolóxicas á existencia de certas estruturas pseudo-Riemannianas. O profesor José Fernando Escobar (Chepe) guiou os meus primeiros pasos no estudo do fluxo de Ricci e as métricas críticas, o que constitúe o meu principal campo de traballo na actualidade. O profesor Peter Gilkey ten sido e segue a ser unha fonte de inspiración e unha referencia para calquera cuestión tanto de Xeometría Diferencial como de Topoloxía ou de Análise.

Moitas outras persoas teñen influído no meu desenvolvemento como investigador, docente e mesmo como persoa. Quixera destacar á profesora María Elena Vázquez Abal e ó meu primeiro alumno de doutoramento, Ramón Vázquez Lorenzo, exemplos de honestidade, compromiso coa docencia e a investigación, e xenerosidade á hora de compartir o seu coñecemento. Sen dúbida algunha os meus *camaradas de traballo*. Asemade, a relación con José Carlos Díaz Ramos e Miguel Brozos Vázquez, primeiro alumnos e dende fai moitos anos colaboradores, segue a ser unha continua fonte de inspiración.

Ben entrados no século XXI debemos comprender que a formación doutoral non só está enfocada á vida académica, nin sequera á investigación. O feito de realizar unha tese de doutoramento en calquera campo científico confire ao estudantado unha perspectiva distinta do mesmo; xa non son *cousas que se estudan*, senón *cousas que se crean*. Estou especialmente orgulloso dos meus estudantes que realizan a súa actividade profesional como profesores de Ensino Secundario. O seu alumnado ten certamente a fortuna de ser formado por profesionais activos, capaces de transmitir unha visión e entusiasmo pola materia ben alonxada dos paradigmas habituais. Estou certo de que esta sería a formación ideal que deberían ter os nosos docentes.

Por último, pero non por iso menos importante, quero agradecer moi especialmente o apoio que sempre recibín da miña familia. A cultura do esforzo e o estudo inculcada pola nosa nai e o noso pai sen dúbida tivo e segue a ter unha grande influencia na forma de afrontar a nosa actividade -de meus irmáns e miña-, ben sexa no eido da medicina, a química, o dereito ou as matemáticas. Sen o apoio deles e dos meus irmáns nunca tería chegado a iniciar este camiño.

Tiven a fortuna de coñecer a Fernanda no periodo de escritura da miña tese de doutoramento, compañeira ao longo de tódalas etapas das nosas carreiras científicas. Os nosos fillos Luis e Hugo sempre entenderon que a investigación non ten horarios. A miúdo foi necesario cambiar plans preestablecidos co gallo de tentar explorar ideas que non sempre proporcionaron os resultados desexados. Non podo estar máis orgulloso deles en tódolos sentidos.

Sen os valores que me trasmitiron meus pais e o apoio incondicional da miña familia, os logros acadados nunca terían sido posibles.

1 Sobre a miña traxectoria investigadora

A investigación en matemáticas é, para desánimo dos que nos dedicamos a ela, unha gran descoñecida, non só polo público xeral senón tamén no ámbito universitario e científico no que desenvolvemos o noso traballo. Preguntas como: Qué se pode investigar nun tema no que xa todo está feito? son, por desgraza, comúns cando expresamos a nosa condición de investigadores matemáticos. O público entende que a investigación se fai en Medicina, Bioloxía, Química, Física e outras disciplinas científicas, onde queda moito por descubrir. Pero, que se pode investigar nunha materia morta como as Matemáticas?

As matemáticas non son en absoluto unha materia morta, senón que están nun continuo proceso de construción e desenvolvemento. Moitos dos avances tecnolóxicos máis recentes non serían posibles sen o seu correspondente fundamento matemático e, aínda que non sexamos conscientes diso, as Matemáticas están permanentemente presentes na nosa vida cotiá.

Neste discurso de ingreso gustaríame reflectir a evolución natural da que foi a miña traxectoria investigadora ao longo de máis de trinta anos no campo da Xeometría Diferencial e, máis concretamente, no estudo da curvatura e da Análise Xeométrica.

Inicialmente o meu interese centrouse no estudo das propiedades da curvatura, considerando diferentes funcións asociadas á mesma ou operadores relacionados co seu comportamento xeométrico, como o operador de Jacobi. O papel dos meus directores de tese, así como as estadías predoutorais na K. U. Leuven traballando baixo a dirección do profesor L. Vanhecke foron determinantes, tanto nos resultados obtidos coma na miña formación. Os problemas abordados tiñan unha estreita relación coa existencia de simetrías e transformacións xeodésicas e a súa relación coa curvatura e propiedades como a harmonicidade, holomorfía ou a homoxeneidade.

Xa na miña etapa posdoutoral comecei a abordar problemas relacionados con diferentes aspectos da formulación matemática da Relatividade Xeral, xunto co profesor D. Kupeli. Os nosos estudos evolucionaron dende a análise da curvatura de espazo-tempos cosmolóxicos, como os espazos de Robertson-Walker, e modelos de estrelas estáticas como a solución de Schwarzschild, ata cuestións de causalidade e resultados de singularidades na liña dos resultados fundacionais de S. Hawking e R. Penrose. Precisamente con este último tiven a oportunidade de compartir, ademais de conversas matemáticas, mesa e mantel na súa visita á USC.

A existencia de métricas de Lorentz ou de sinatura neutra en dimensión catro foi un problema que abordei en colaboración co profesor Y. Matsushita. Unha estadía na Universidade de Kyoto en 1998, subvencionada pola Fundación Canon, foi determinante para completar algúns aspectos dese proxecto e establecer novas colaboracións con numerosos xeómetras xaponeses. Abordamos a existencia de métricas simplécticas que admiten métricas de Einstein en relación á conxectura de Goldberg, para a que fomos quen de atopar exemplos non kählerianos.

Durante os anos 1999 e 2000 visitei en numerosas ocasións a Universidade de Cornell, onde comecei a traballar co profesor J. F. Escobar (Chepe) sobre o fluxo de Ricci e a existencia e clasificación das métricas críticas para distintos funcionais da curvatura, dous aspectos básicos na Análise Xeométrica. Desafortunadamente esa colaboración non se puido prolongar no tempo, pero sen dúbida foi a semente do meu traballo actual.

De xeito simultáneo, e case ininterrompido dende o ano 2000, mantemos unha colaboración de traballo co profesor P. Gilkey, da Universidade de Oregon. O noso campo de investigación céntrase na correspondencia entre as xeometrías afín e riemanniana, especialmente entre as superficies afíns e as métricas de sinatura neutra en dimensión catro. Esta correspondencia permitiunos obter resultados de clasificación e construción de exemplos tanto de solitóns de Ricci como de estruturas quasi-Einstein e conforme Einstein, reducindo un problema métrico de catro dimensións a outro afín en só dúas dimensións.

Unha boa parte dos resultados acadados baseáronse no uso da simetría, tanto dende un punto de vista xeométrico como analítico, e no desenvolvemento de métodos computacionais. Dun xeito pouco rigoroso podemos pensar na simetría como un elemento simplificador das diferentes ecuacións ás que nos enfrontamos. Así, en moitos casos é posible reducir sistemas de ecuacións en derivadas parciais a ecuacións ordinarias e mesmo a sistemas alxébricos. O emprego de elementos de álxebra computacional á hora de abordar o estudo das ecuacións alxébricas foi decisivo en moitos momentos, así como o desenvolvemento dentro do noso propio grupo de traballo de ferramentas de cálculo simbólico adaptadas aos diferentes problemas considerados.

O recoñecemento internacional do noso traballo foi patente cando recibín as invitacións, no ano 2012, para unirme aos Comités Editoriais das revistas "*Differential Geometry and Its Applications*" e "*The Journal of Geometric Analysis*", que constitúen algunhas das publicacións de referencia na área. Asemade son na actualidade o coordinador da "*Red Española de Análisis Geométrico*".

2 Un paseo moi rápido pola historia

2.1 Inicios da xeometría diferencial (ata 1600)

O estudo da Xeometría remóntase varios milenios atrás. Xa no Antigo Exipto, ás beiras do río Nilo, os agrimensores utilizaban os seus coñecementos xeométricos para reconstruír as parcelas de labradío cada vez que o río as desfacía coas súas enchentes. Pero é a Civilización Grega a que marca o desenvolvemento inicial da Xeometría como a coñecemos nos nosos días. O saber xeométrico da época permitiu avanzar no coñecemento do medio e, moi en especial, da Astronomía. Nos *Elementos* de Euclides xa se entendía que unha liña recta podía definirse polo feito de proporcionar a distancia máis curta entre dous puntos e, aplicando ese mesmo principio á esfera terrestre (e si, na Grecia Clásica sabíase que a Terra era "redonda") chegouse á conclusión de que os círculos máximos proporcionan o camiño máis curto entre dous puntos da superficie da Terra. Este feito foi utilizado por Eratóstenes para medir a lonxitude do arco entre dous puntos e dar así unha boa estimación do tamaño do planeta.

No ano 1590 Mercator deseñou unha proxección da superficie terrestre que hoxe en día leva o seu nome. Coñecíanse distintas representacións da Terra dende o tempo de Ptolomeo, pero a de Mercator presentaba algúns aspectos sorprendentes. Orientada a facilita-la navegación marítima, a proxección de Mercator representaba as liñas de rumbo (loxodromas) como liñas rectas, o que facilitaba o labor dun navegante. Na súa formulación actual a proxección de Mercator baséase no uso da función logarítmica, que non foi propiamente descrita ata o traballo de Napier do ano 1614. Máis sorprendente aínda é o feito de que conserva a forma dos accidentes xeográficos (é unha proxección conforme), e segue a ser utilizada por aplicacións como *Google Maps*.

O feito de que desenvolvementos matemáticos con máis de catro séculos de antigüidade sexan utilizados pola tecnoloxía máis recente fainos ser dubidosos do valor real de certos indicadores científicos coma o "Immediacy Index", ou o "5-year journal Impact Factor" na evaluación da actividade investigadora.

2.2 Xeometría despois do cálculo diferencial (1600–1800)

Coa introdución do cálculo por Leibniz e Newton foi posible avanzar no estudo das curvas planas e a investigación de conceptos como o de círculo osculador que axuda a medi-la curvatura. Nos traballos de Bernoulli calcúlanse as tanxentes a algunhas curvas planas e descríbese a primeira fórmula analítica para a noción de curvatura.

Nesta época Euler fixo contribucións moi relevantes en Xeometría Diferencial. Estudou a noción de xeodésica sobre superficies, obtendo a primeira ecuación de tales curvas. Asemade, o seu estudo da mecánica levou á comprensión do feito de que unha masa que viaxase ao longo dunha superficie sen estar suxeita a ningunha forza externa seguiría unha traxectoria xeodésica. Un precursor do que serían as ideas fundacionais da mecánica hamiltoniana e lagrangiana, así como da Relatividade Xeral.

2.3 Xeometría intrínseca e non euclidiana (1800-1900)

O campo da Xeometría Diferencial converteuse nunha área de estudo propia a raíz dos traballos fundacionais de Gauss (1777-1855). A obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publicada en 1827, considérase o punto de inicio da Xeometría Diferencial moderna, onde se introduce a xeometría diferencial intrínseca e se establecen nocións básicas como a curvatura de Gauss, a primeira e segunda formas fundamentais, e se proba o Teorema Egregium. Así mesmo, os cálculos de xeodésicas e áreas de triángulos xeodésicos deron lugar ao Teorema de Gauss-Bonnet que, sen dúbida algunha, constitúe unha das conexións máis relevantes e inspiradoras entre a Xeometría Diferencial e a Topoloxía.

Pola mesma época, Bolyai e Lobachevsky, xunto ao xa citado Gauss, descubriron independentemente a xeometría hiperbólica e demostraron así a existencia de xeometrías consistentes fóra do paradigma de Euclides. Na década de 1860 Beltrami construíu modelos concretos para estas xeometrías. Foi Klein quen estableceu a denominación de xeometría non euclidiana en 1871 a través do programa de Erlangen, que puxo en nivel de igualdade as xeometrías euclidianas e non euclidianas. Implicitamente, a xeometría esférica da Terra, que se viña estudando desde a antigüidade era unha xeometría elíptica, polo tanto non euclidiana.

2.4 Xeometría de Riemann

O desenvolvemento da Xeometría Diferencial intrínseca foi impulsado por Riemann (1826-1866), alumno de Gauss, na súa Habilitación do ano 1854. Nesta obra Riemann introducíu por primeira vez as nocións de métrica e o seu tensor de curvatura asociado, a partir dunha idea de Gauss sobre o elemento de liña dunha superficie. Riemann comenzou a facer un uso sistemático da álxebra lineal e multilineal, que desempeña un papel esencial na teoría das formas cuadráticas e da curvatura. Aínda que a noción de variedade (topolóxica ou diferenciable) non estivera establecida nese tempo, Riemann traballa a nivel local e propón a posibilidade de investiga-las propiedades do espazo-tempo a partir da análise do movemento das masas dentro do mesmo. Esta idea, que enlaza coa observación de Euler de que as partículas en movemento libre deberían seguir traxectorias xeodésicas, é unha precursora do principio de equivalencia de Einstein.

A raíz do traballo fundacional de Riemann, as técnicas utilizadas en Xeometría Diferencial comezaron a ser máis sistemáticas. Xurdiron nocións como a de grupo de Lie, derivada covariante e cálculo tensorial. Foi nesta linguaxe na que a xeometría diferencial e as métricas de Lorentz foron utilizadas por Einstein na formulación da Relatividade Xeral, onde o espazo-tempo se describe como unha variedade diferenciable, e as ecuacións de campo se establecen en termos da curvatura de dita variedade.

Unha forma sinxela de construír variedades riemannianas é considerar subconxuntos (con certas propiedades de diferenciabilidade) no espazo euclidiano R^N e considerar sobre cada espazo tanxente a restrición do produto escalar de R^N. Os teoremas de inmersión de Nash [20] mostran que toda variedade de Riemann pode ser mergullada nun espazo euclidiano de dimensión suficientemente grande, de xeito que o seu tensor métrico é a restrición do produto escalar ambiente. Así, un aspecto esencial en xeometría riemanniana é a busca da “mellor” forma de mergullar unha variedade dada no espazo euclidiano, ou equivalentemente, a procurar cal é a “mellor estrutura riemanniana” sobre unha variedade. Dende logo, o cualificativo “mellor” debe ser especificado en cada caso e dependerá do obxecto de estudo a considerar.

Dende finais do século XIX a Xeometría Diferencial foise convertendo nun campo que se ocupa, de forma máis xeral, das estruturas xeométricas en variedades diferenciables. Unha estrutura xeométrica é aquela que permite determinar algunha noción de tamaño, distancia, forma, volume ou outra medida. Deste xeito, en xeometría riemanniana especifícanse distancias, en xeometría simpléctica poden calcularse volumes, en xeometría conforme soamente se consideran ángulos, etc.

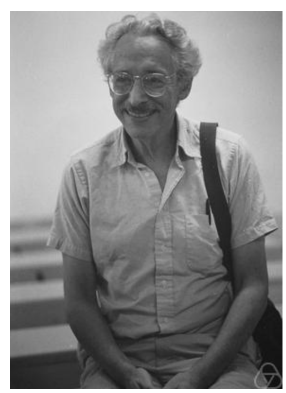
A Xeometría Diferencial non só é o marco adecuado para a formulación de cuestións matemáticas como a análise de extremos condicionados, senón que encontra aplicacións noutras áreas das Matemáticas e as ciencias naturais. A linguaxe da Xeometría Diferencial desempeña un papel esencial na Relatividade Xeral, así como en posteriores teorías físicas (teorías relativistas modificadas, teoría cuántica de campos, o modelo estándar da física de partículas, etc.). Fóra da Física, a Xeometría Diferencial está presente en problemas variacionais tanto en Química como en Biomedicina, Enxeñería, deseño asistido por ordenador ou, máis recentemente, en aprendizaxe automático, por citar só algunhas das aplicacións máis inmediatas.

3 A curvatura

A noción de curvatura ocupa un lugar destacado en xeometría. Intuitivamente, a curvatura é unha medida de como un obxecto xeométrico se desvía de ser plano ou lineal. En palabras do profesor R. Osserman [22]

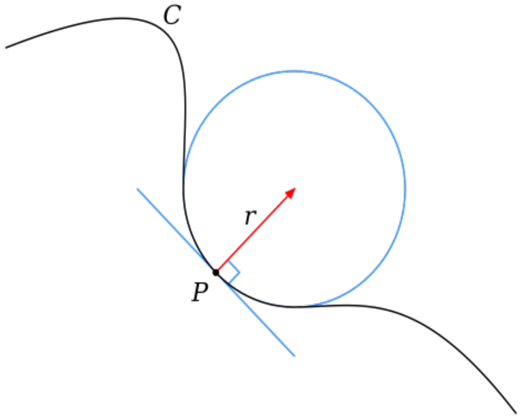
"The notion of curvature is one of the central concepts of differential geometry; one could argue that it is ***the*** central one, distinguishing the geometrical core of the subject from those aspects that are analytic, algebraic, or topological."

Prof. R. Osserman (1926–2011)

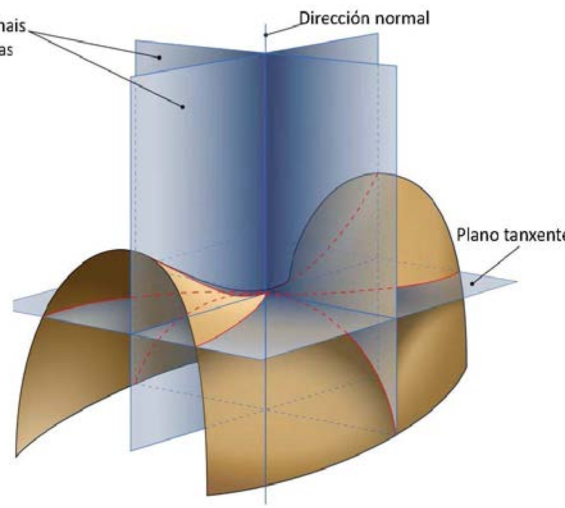


3.1 Curvatura de superficies

A idea detrás do concepto de curvatura para curvas planas é sinxela: trátase de medir canto cambiamos a dirección a medida que percorremos a curva. Isto pode facerse nun punto tomando a circunferencia que mellor aproxima á curva e asignando como valor da curvatura en dito punto o inverso do raio da devandita circunferencia osculatriz. Utilizando esta noción e, pensando en superficies no espazo euclidiano $S \subset R^3$ pódense construír familias de curvas planas pasando por un punto dado: as seccións normais da superficie. As curvaturas de ditas seccións normais no punto base $p \in S$ están comprendidas entre uns valores mínimo e máximo $\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p)$ que se denominan curvaturas principais.



Circunferencia osculatriz dunha curva plana



Seccións normais dunha superficie

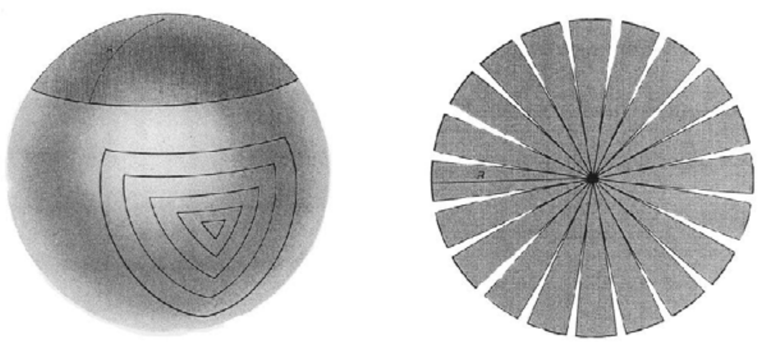
Asociadas a ditas curvaturas principais constrúense a *curvatura de Gauss* e a *curvatura media* no punto $p \in S$ como

$$K(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p), \qquad H(p) = \frac{1}{2}\big(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\big).$$

A curvatura media permite medir como evoluciona a área dunha rexión da superficie ao considerar variacións normais da mesma dando lugar á enerxía de Willmore, que é central na análise da desviación dunha superficie con respecto a unha esfera. Con todo, non é un invariante intrínseco da superficie, é dicir, o seu valor pode cambiar se transformamos a superficie aínda que preservemos a distancia entre os seus puntos. Pola contra, isto si sucede coa curvatura de Gauss, que si é un invariante intrínseco, como amosa o Teorema Egregium de Gauss.

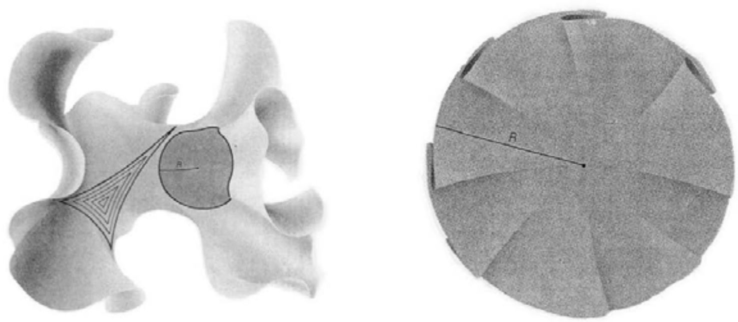
O carácter intrínseco da curvatura de Gauss pode percibirse a través das circunferencias xeodésicas. Se fixamos un punto dunha superficie $p \in S$ e consideramos os puntos que se atopan a unha distancia (intrínseca) fixa $R > 0$ respecto do punto base, estamos a describi-las circunferencias xeodésicas, $S_p(R)$, de centro $p \in S$ e raio R. Dende a nosa etapa de Educación Primaria sabemos que a lonxitude de ditas circunferencias no plano só depende do radio $R > 0$ e toma o valor $2\pi R$. Porén nunha superficie arbitraria, a lonxitude da circunferencia xeodésica $L(\mathrm{S}_p(R))$ varía co raio, mais tamén pode variar co centro. En particular, sobre superficies con curvatura de Gauss constante este valor resulta $L(\mathrm{S}_p(R)) = 2\pi \sin R$ (no caso de curvatura positiva $K = 1$), ou $L(\mathrm{S}_p(R)) = 2\pi \sinh R$ (no caso de curvatura negativa $K = -1$). É sinxelo experimentar fisicamente este feito como amosamos a continuación.

Se despois de exprimir unha laranxa tratamos de aplanar a tona restante, observaremos que esta se rompe, debido a que a lonxitude da súa circunferencia exterior é menor cá que lle correspondería como circunferencia no plano, o que constitúe unha proba experimental da observación anterior.



Circunferencias xeodésicas na esfera: $L(\mathrm{S}_p(R)) = 2\pi \sin R < 2\pi R$.

O mesmo sucede se cortamos un anaco pequeno de rosca da súa parte exterior e tentamos aplanalo. A situación oposta ocorre cando o corte se fai na zona próxima ao burato. Cando o esmaguemos nunha mesa veremos que se engurra e se solapa consigo mesmo, mostrando que a área de esta rexión é maior cá da rexión correspondente do plano.



Circunferencias xeodésicas na pseudoesfera: $L(\mathrm{S}_p(R)) = 2\pi \sinh R > 2\pi R$.

De feito, o Teorema Egregium de Gauss séguese do cálculo das lonxitudes de circunferencias xeodésicas e a súa comparación coas correspondentes do espazo euclidiano mediante un proceso de paso ao límite. Dun xeito máis preciso, en cada punto $p \in \mathrm{S}$, a curvatura de Gauss verifica

$$K(p) = \frac{3}{\pi} \lim_{R \to 0} \frac{2\pi R - L(S_p\ (R))}{R^3},$$

o que evidencia que a curvatura de Gauss pode obterse a partir de medicións locais sobre a propia superficie e, polo tanto, é un concepto intrínseco.

O Teorema de Uniformidade establece que toda superficie é localmente conformemente chá e, polo tanto, admite métricas con curvatura de Gauss constante. De feito, partindo dunha métrica inicial g_0 sobre S con curvatura de Gauss $K(g_0)$, unha deformación conforme $g = e^{\sigma} g_0$ ten curvatura de Gauss constante c se a función de rescalamento σ é solución da ecuación elíptica $\Delta\sigma + K(g_0) = ce^{\sigma}$. A existencia de solucións de esta ecuación garante a construción das métricas desexadas.

3.2 Curvatura de variedades riemannianas

En dimensións superiores a formalización matemática da curvatura vén dada en termos dun obxecto tensorial que determina non só a forma na que se separan as xeodésicas que emanan dun punto dado, senón tamén a forma na que o tensor métrico se diferencia do produto escalar euclidiano. Dada a complexidade do tensor curvatura, ás veces céntrase a atención en obxectos asociados a el que codifican só unha parte da súa información. De entre os obxectos asociados ao tensor de curvatura son especialmente relevantes os seguintes.

A *curvatura seccional*, que vén dada en cada punto pola curvatura de Gauss dunha superficie tanxente ao subespazo 2-dimensional escollido. Un feito salientable é que a curvatura seccional determina por completo o tensor de curvatura. Con todo, a súa análise é complexa debido a que é unha función definida non sobre a variedade dada, senón sobre un certo espazo fibrado asociado á variedade mesma.

O *tensor curvatura de Ricci*, que vén dado polos valores promedio da curvatura seccional, mide o grao en que a aplicación exponencial distorsiona o volume. Ademais constitúe un aspecto central nas ecuación de campo de Einstein, que se obteñen a partir do gradiente do funcional determinado pola curvatura escalar total. A *curvatura escalar* é unha función real sobre a variedade (a semellanza da curvatura de Gauss) que se obtén como a traza do tensor de Ricci. Aínda que poida ser considerado como o invariante máis natural da curvatura, a información que proporciona sobre a xeometría da variedade é máis ben limitada.

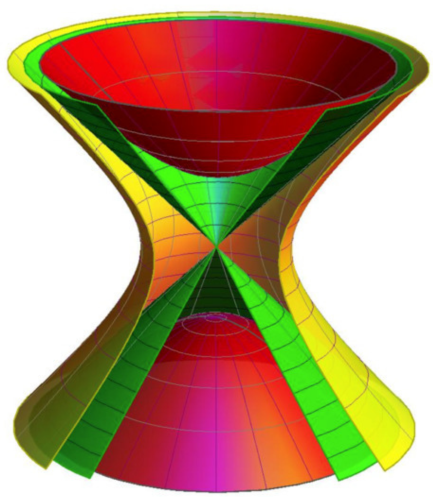
As métricas de Einstein son aquelas para as que o seu tensor curvatura de Ricci é un múltiplo escalar da métrica. Como ben pode ser inferido polo seu propio nome, as variedades de Einstein son especialmente relevantes nas aplicacións físicas, e o seu estudo foi dende hai décadas e segue a ser un campo central de investigación.

Os *operadores de Jacobi* non só determinan a curvatura seccional e o tensor de Ricci, senón que permiten obter o campo variacional de calquera variación xeodésica. Así, estes operadores miden a aceleración coa que as xeodésicas se afastan unhas de outras. Consecuentemente é o obxecto matemático responsable de modelar a forza que experimentan as partículas en caída libre.

A existencia de estruturas adicionais sobre unha variedade dada (Kähler, Sasakianas, cuaterniónicas, etc.) inflúe sobre a curvatura da variedade e, reciprocamente, en certos casos é posible utilizar o tensor de curvatura para construír novas estruturas, dado que este tensor pode ser equivalentemente descrito coma un endomorfismo do fibrado de 2-formas sobre a variedade. Moitas estruturas xeométricas correspóndense con seccións especiais de certos fibrados. Así, as estruturas Kähler veñen determinadas por seccións paralelas e non dexeneradas do fibrado de 2-formas sobre a variedade. É polo tanto posible en certas situacións asociar seccións de $\Lambda^2(TM)$ a autoespazos distinguidos do operador de curvatura. Esta idea foi explorada por Derdzinski mostrando que toda métrica de Einstein en dimensión catro está na clase conforme dunha métrica de Kähler baixo unha condición de non-dexeneración no operador de curvatura.

3.3 Curvatura de variedades de Lorentz: subespazos dexenerados

Aínda que a xeometría Riemanniana recibiu inicialmente un maior grao de atención, a *Xeometría de Lorentz* pasou a desempeñar un papel esencial nas aplicacións físicas, dado que constitúe a base da formulación matemática da Relatividade Especial e Xeral. Pese a que formalmente se asemelle á Xeometría riemanniana, presenta diferenzas esenciais, comezando pola súa mesma existencia, que se ve fortemente restrinxida pola topoloxía da variedade. Á hora de estudar a curvatura, o feito de existir direccións espaciais (determinadas por vectores de norma positiva), temporais (determinadas por vectores de norma negativa) e luminosas (correspondentes a vectores de norma nula) dá lugar a non poucas situacións patolóxicas.



No espazo de Minkowski os vectores de módulo κ^2 constitúen o hiperboloide dunha folla $x^2+y^2-z^2=\kappa^2$ (en cor amarelo), namentres que os vectores de módulo $-\kappa^2$ sitúanse nos puntos do hiperboloide de dúas follas $x^2+y^2-z^2=-\kappa^2$ (en cor vermello). Os vectores luminosos atópanse sobre o dobre cono $z^2=x^2+y^2$ (en cor verde).

O feito mesmo de que a curvatura seccional non estea definida sobre toda a grassmanniana de 2-planos, senón só sobre a subvariedade aberta determinada polos planos non dexenerados, fai que a curvatura seccional non tome valores acoutados. Así xorden de modo inmediato os problemas de acoutamento e extensión con continuidade da curvatura seccional a toda a grassmanniana. Estas cuestións foron estudadas, entre outros, por Kulkarni e Nomizu, quen mostraron que a resposta positiva a ámbalas dúas cuestións só pode darse en espazos de curvatura seccional constante. Unha situación análoga dáse no campo das estruturas Kähler indefinidas, cuxo estudo constituíu un dos aspectos centrais da miña tese de doutoramento.

Outro aspecto esencial na diferenza entre as xeometrías riemanniana e de Lorentz é a non existencia dunha distancia intrínseca no segundo caso. Non é posible medir a distancia entre puntos dun xeito análogo a como estamos afeitos, senón que no marco lorentziano esta debe considerarse a partir da separación temporal. O concepto de separación temporal subxace no estudo da *causalidade* en Xeometría de Lorentz. A existencia de xeodésicas temporais pechadas (que violaría a condición de causalidade cronolóxica) podería dar lugar a modelos do espazo-tempo onde un obxecto viaxando ao futuro vólvese atopar co seu propio pasado. A análise de distintas condicións de causalidade, e a súa relación coa curvatura e a xeometría subxacente da variedade, é un aspecto central en xeometría de Lorentz sen análogo riemanniano. A modo de exemplo, os teoremas de mergullo riemanniano de Nash non son certos no contexto lorentziano, senón que a súa validez está condicionada pola restrición máis forte que impón a causalidade, como mostraron Müller e Sánchez en [19].

4 Ecuacións diferenciais e Análise Xeométrica.

Dende un punto de vista analítico, para unha ecuación diferencial dada, o seu estudo céntrase na existencia de solución e, no seu caso, na súa unicidade baixo condicións prefixadas que ben poden ser de valores iniciais ou de fronteira. Dende unha perspectiva xeométrica é importante a existencia de dominios característicos para tal ecuación, isto é, se a existencia de solucións definidas sobre unha variedade dada leva a restricións sobre a súa xeometría que poidan permitir a súa caracterización como as únicas variedades onde esa ecuación teña solución non trivial. Obviamente a posibilidade de obter tales resultados dependerá da ecuación mesma e, principalmente, do seu significado xeométrico ou físico.

A *ecuación de Obata* sobre unha variedade riemanniana (M,g) pode ser escrita como

$$Hes(f) + \lambda f g = 0,$$

onde $Hes(f)$ representa o hessiano dunha función diferenciable respecto da métrica riemanniana. Esta ecuación é un sistema sobredeterminado de ecuacións en derivadas parciais de segunda orde do que, tomando trazas, se obtén a ecuación $\Delta f + n\lambda f = 0$. Así, calquera solución debe ser unha función propia do laplaciano e o valor $-n\lambda$ correspóndese co primeiro valor propio do operador de Laplace, o que pon de manifesto a relevancia xeométrica de esta ecuación. Para o valor $\lambda = 0$, cada solución non constante da ecuación

$Hes(f) = 0$ permite descompoñer unha liña na variedade, de xeito que esta resulta ser localmente isométrica a un produto $N \times \mathrm{R}$. Para o valor $\lambda > 0$, as únicas variedades (conexas e completas) que admiten solucións non triviais son as esferas, mentres que no caso $\lambda < 0$ a existencia de solucións non triviais permite caracterizar distintos modelos do espazo hiperbólico [12, 21].

A ecuación de Obata é un caso especial da ecuación de Möbius $Hes(f) = \frac{\Delta f}{\mathrm{n}} g$, que permite caracterizar a estrutura local dos productos deformados. A pesar da súa sinxeleza, os produtos deformados son a estrutura subxacente en practicamente todos os modelos relativistas, tanto cosmolóxicos como estáticos, debido á existencia de simetrías infinitesimais nestas variedades. O seu estudo constituíu un dos aspectos centrais da tese de doutoramento de Miguel Brozos Vázquez.

As *variedades harmónicas* xorden como aquelas variedades riemannianas onde a ecuación $\Delta f = 0$ admite unha solución que só depende da función distancia intrínseca. Pese a que tal condición resulta ser moi ríxida, aínda non está dispoñible unha descrición completa das variedades harmónicas e, por agora, os únicos casos coñecidos son os espazos homoxéneos dous-puntos e as variedades de Damek-Ricci.

Por outra banda, a existencia de solucións independentes dunha ecuación dada tamén proporciona información sobre a xeometría subxacente. Tal é o caso da ecuación conforme Einstein, que admite solucións linealmente independentes se e só se a variedade é localmente conformemente plana ou localmente isométrica a unha variedade de fronte de onda (pp -wave) no caso lorentziano. As variedades de fronte de onda, ao admitir un campo de vectores luminoso paralelo, presentan simetrías sen un análogo riemanniano, o que as fai especialmente útiles en dimensións baixas $n = 3,4$. O estudo da súa curvatura desenvolveuse na tese de doutoramento de Mohammad Chaichi.

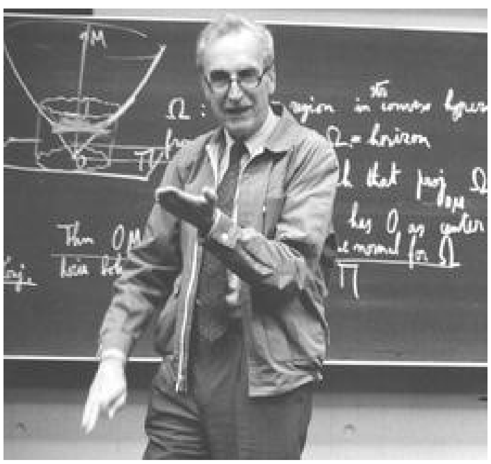
O estudo xeométrico das ecuacións diferenciais, e o seu uso para resolver problemas de índole xeométrica ou topolóxica constitúe o que actualmente se denomina Análise Xeométrica. Pola súa propia natureza esta área interrelaciónase con outras ramas da matemática como son a Topoloxía, a Análise Matemática, Variable Complexa, Probabilidade, etc. Os principais problemas abordados veñen da Xeometría Riemanniana e as súas relacións coa Topoloxía e a Física, sendo estas conexións un dos motores fundamentais do seu estudo. A continuación sinalarei algúns temas centrais na Análise Xeométrica. Comezando polas conxecturas de Calabi e Poincaré, que se consideran o nacemento e o seu maior éxito ata a data, rematarei sinalando aspectos relacionados con cuestións variacionais e a construción das métricas de Einstein.

4.1 A conxectura de Calabi

A conxectura de Calabi céntrase na existencia dun certo tipo de métricas sobre unha clase especial de variedades complexas. De forma un pouco máis precisa, a conxectura aseguraba a existencia de solución para un problema de curvatura de Ricci preestablecido.

Sobre unha variedade Kähler (M, g, J), a 2-forma de Ricci (obtida ao combinar o tensor de Ricci coa estrutura complexa) é unha forma pechada que representa a clase de cohomoloxía correspondente á primeira clase de Chern $c_1(M)$. A fin de evitar situacións patolóxicas correspondentes a variedades simplécticas que non admiten métricas de Kähler, Calabi conxecturou que para calquera 2-forma pechada Ω non dexenerada, existe exactamente unha métrica de Kähler en cada clase de métricas de Kähler con forma de Ricci precisamente Ω. A conjectura de Calabi foi probada por Shing-Tung Yau, quen recibiu a Medalla Fields pola súa proba. Un aspecto central do seu traballo consistiu na análise dunha ecuación de Monge-Ampère complexa, o que adoita considerase a orixe da Análise Xeométrica.

Inicialmente, Calabi xa tiña transformado a súa conxectura nun problema de ecuacións tipo Monge-Ampère complexas e mostrou que esa ecuación tiña como moito unha solución, o que probaba a unicidade da solución buscada. Yau foi quen de construír unha solución da ecuación resolvendo primeiro unha ecuación máis sinxela e amosando despois que a solución encontrada podía ser deformada con continuidade a unha solución da ecuación más complexa.



Prof. E. Calabi (1923-2023)

Prof. S. T. Yau

Na situación especial de que a primeira clase de Chern sexa nula, a conxectura de Calabi garante a existencia de exactamente unha métrica Kähler Ricci-plana. Isto pode ser visto como un resultado de existencia e unicidade para métricas Kähler-Einstein de curvatura escalar nula no eido das variedades complexas compactas.

4.2 A conxectura de Poincaré

O resultado recente máis salientable no campo da Análise Xeométrica é a demostración da conxectura de Poincaré, unha cuestión puramente topolóxica cuxa solución foi acadada utilizando técnicas de ecuacións en derivadas parciais, análise funcional, topoloxía alxébrica e xeometría de Riemann, unha mostra máis do carácter multidisciplinar das matemáticas.

Se estiramos unha goma elástica arredor da superficie dunha laranxa, é posible encolle-la ata un punto movéndoa sobre a superficie sen rompela. Este desenvolvemento non é posible sobre outros tipos de superficies como por exemplo un toro de revolución (a superficie dunha rosca). Así, dicimos que a superficie da laranxa é *simplemente conexa*, mentres que a do toro non o é.

Poincaré sabía que a esfera bidimensional podía ser caracterizada por esta propiedade topolóxica e formulou en 1904 a pregunta dunha posible caracterización da esfera de dimensión tres pola propiedade de ser simplemente conexa. Esta cuestión resultou ser extraordinariamente difícil de responder e pasou case un século ata a solución de Perelman entre os anos 2002 e 2003 (recollida en tres traballos publicados na base de datos "arXiv.org"). Aínda que os traballos de Perelman non foron publicados de "forma oficial" a súa demostración foi plenamente aceptada e otorgóuselle a Medalla Fields no ano 2006 por este logro. Perelman baseou a súa solución no estudo do fluxo de Ricci, previamente desenvolvido por Hamilton.

Prof. H. Poincaré (1854-1912)

Prof. G. Perelman

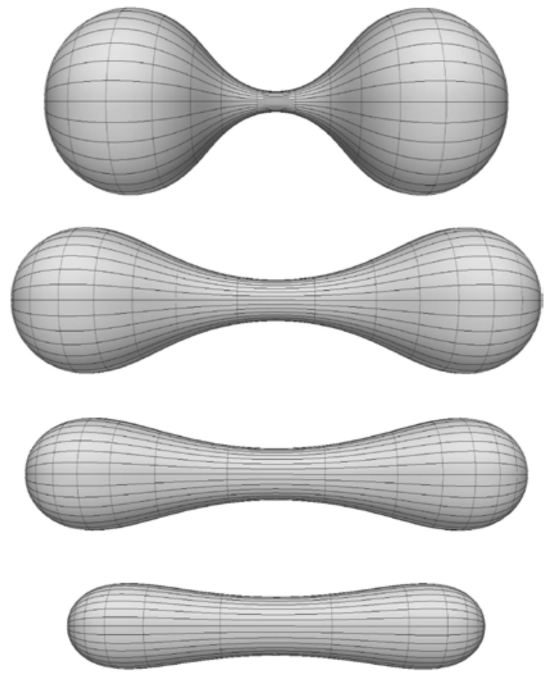
Nunha variedade de Riemann (M, g), unha familia un-paramétrica de métricas $\{g(t)\}$ é unha solución do *fluxo de Ricci* se verifica a ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\rho(t), \quad \text{sendo} \quad g(0) = g,$$

onde $\rho(t)$ representa o tensor de Ricci da métrica $g(t)$. Hamilton [15] foi o primeiro en utilizar este fluxo, demostrando que calquera variedade compacta de dimensión tres que admita unha métrica de curvatura positiva tamén admite unha métrica de curvatura seccional constante.

De maneira semellante a como ocorre coa difusión da calor, o fluxo de Ricci é un fluxo intrínseco que deforma a métrica suavizando a súa curvatura (coa idea última de converxer a unha métrica de Einstein).

Abaixo pode verse a deformación dunha superficie de revolución con forma de mancuerna baixo o fluxo de Ricci. Os debuxos correspóndense coa evolución da superficie a intervalos de tempo iguais, e están deseñados á mesma escala como se mostra en [28].



Con todo, certas métricas desenvolven singularidades en tempo finito, un problema central na análise de Perelman.

Existen métricas que non poden mellorar o seu comportamento mediante o fluxo de Ricci. En particular, as métricas de Einstein (onde o tensor de Ricci é un múltiplo escalar da métrica, $\rho = \lambda g$) mantéñense invariantes baixo o fluxo de Ricci salvo homotecias. De feito, $g(t) = (1-2\lambda t)g$ é unha solución de dito fluxo. Dunha forma máis xeral, dado un grupo un-paramétrico de transformacións $\Psi_t : M \to M$ e unha función positiva $\sigma(t)$, unha solución da forma $g(t) = \sigma(t)(\Psi_t^* g)$ chámase unha solución auto-similar. Tales solucións representan os puntos fixos xeométricos do fluxo (isto é, as solucións que permanecen invariantes salvo difeomorfismos e rescalamentos), que son coñecidos como *solitóns de Ricci*. Estas solucións caracterízanse pola ecuación diferencial xeométrica

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}} g + \rho = \lambda g,$$

onde $\mathcal{X}$ é un campo de vectores sobre a variedade e $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$ denota a derivada de Lie ao longo do fluxo de $\mathcal{X}$. A análise dos solitóns de Ricci é fundamental á hora de comprende-las singularidades do fluxo de Ricci e o traballo de Perelman ten contribuído de forma esencial á súa clasificación.

O noso traballo centrouse inicialmente na clasificación dos solitóns de Ricci baixo propiedades xeométricas, que van dende aspectos do comportamento da súa curvatura ata a existencia de certas simetrías na estrutura subxacente. Os primeiros resultados riemannianos, conxuntos con Manuel Fernández López, motivaron a análise da situación lorentziana que foi o núcleo da tese de doutoramento de Sandra Gavino Fernández. Dende un punto de vista físico é relevante o estudo dunha modificación do fluxo de Ricci, o fluxo de Ricci renormalizado, que consituíu a cuestión central na tese de doutoramento de Rodrigo Mariño Villar.

Ademais de ser unha ferramenta básica na proba da conxectura de Poincaré, o fluxo de Ricci foi utilizado recentemente, por exemplo, na demostración de teoremas de pinzamento para a curvatura. O Teorema de Pinzamento da curvatura establece que se M é unha variedade compacta onde a curvatura seccional de calquera 2-planos $\pi_1, \pi_2 \subset T_pM$ verifica $0 < K(\pi_1) < 4K(\pi_2)$, entón é difeomorfa á esfera euclidiana. Mentres que o problema fora resolto a nivel topolóxico no ano 1960, o aspecto diferenciable era moito máis complexo debido á existencia de esferas exóticas. De feito, non foi ata 2007 que Brendle e Schoen conseguiron concluír a súa demostración [3].

4.3 Métricas críticas e problemas variacionais

A orixe do cálculo de variacións adoita situarse na solución de Newton para o problema da curva braquistócrona. Tratábase de atopar a curva no plano unindo dous puntos, de xeito que proporcione a traxectoria para a que un corpo que se movese tan só baixo os efectos da gravidade empregase o menor tempo posible en recorrela. En termos de xogos infantís, trataríase de atopar a forma do tobogán máis rápido.

De xeito pouco rigoroso pódese dicir que o cálculo variacional é o problema matemático consistente en atopar valores extremos para determinados funcionais. Esta idea xeral inclúe problemas como o de atopar a curva de menor lonxitude que une dous puntos ou a construción de superficies de revolución con área mínima. Máis aló da cuestión puramente matemática, o cálculo variacional atopa aplicacións importantes en Física, Química, Bioloxía, e mesmo Economía. Seguro que a pouco que busquemos podemos atopar un problema variacional en calquera disciplina científica.

Dende un punto de vista puramente xeométrico, as curvas xeodésicas caracterízanse por ser as curvas críticas para o funcional de lonxitude. As superficies minimais e as de curvatura media constante, así como as aplicacións harmónicas, son algúns exemplos amplamente estudados de nocións xeométricas que xorden de modo natural como solución de problemas variacionais. Resulta moi ilustrativo que as pompas e as películas de xabón adopten a forma dunha superficie que é solución dun problema deste tipo.

As *aplicacións harmónicas* correspóndense cos puntos críticos do funcional de enerxía de Dirichlet

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |df|^2 dvol_g,$$

onde as correspondentes ecuacións de Euler-Lagrange veñen determinadas pola anulación do campo de tensión da aplicación $\tau(f) = traza\nabla df$, onde ∇df denota a segunda forma fundamental asociada á aplicación considerada. As aplicacións harmónicas xeneralizan as isometrías e conteñen como caso particular as aplicacións holomorfas entre variedades kählerianas. Son por tanto especialmente axeitadas para comparar propiedades xeométricas das variedades dominio e imaxe.

De maneira informal podemos pensar a enerxía de Dirichlet dunha aplicación $f : M \to N$ como a medida da forma na que se deforma a variedade M ao mover os seus puntos sobre N . Se pensamos nunha banda elástica e a estiramos sobre a superficie dunha laranxa, a tensión total á que se somete esta banda está representada pola enerxía da aplicación subxacente. O estudo das aplicacións harmónicas comezou no ano 1964, cando Eells e Sampson amosaron que baixo certas condicións toda aplicación podía ser deformada nunha aplicación harmónica [9]. O seu traballo foi a inspiración para o estudo posterior do fluxo de Ricci. A curvatura desempeña un papel esencial no comportamento das aplicacións harmónicas, e reciprocamente, a existencia de tales aplicacións ten consecuencias sobre a curvatura. O estudo da harmonicidade aparece sistematicamente en relación co noso campo de traballo. Ao ser unha condición máis débil que o carácter isométrico permite unha maior flexibilidade á hora de comparar propiedades e foi un aspecto básico no noso estudo das aplicacións riemannianas.

Unha superficie $\mathsf{S} \subset \mathsf{R}^3$ dise *minimal* se representa un punto crítico para o funcional de área. Nun dominio compacto dunha superficie S parametrizada por $\mathbf{x}(u,v)$ consideramos variacións normais determinadas localmente por parametrizacións da forma $\mathbf{x}[t](u,v) = \mathbf{x}(u,v) + t\phi(u,v)(\xi \circ \mathbf{x})(u,v)$, onde ξ denota un vector normal á superficie no dominio dado e ϕ é unha función diferenciable con soporte contido no interior do dominio. Así, considerando variacións do funcional de área, $t \mapsto Area(S[t]) = \int_M dvol[t]$, a superficie inicial é un punto crítico se e só se a curvatura media satisfai $H = 0$. Considerando un anaco de superficie S e os correspondentes sobre as superficies paralelas $S[t]$ obtidas ao mover a superficie orixinal de modo uniforme ao longo da dirección normal (que corresponde á situación en que $\phi(u,v) = 1$), tense que a evolución da área vén controlada polas curvaturas totais media e de Gauss:

$$Area(S[t]) = Area(S) - 2t\int_S H + t^2\int_S K,$$

o que mostra que ámbalas dúas curvaturas desempeñan un papel esencial na evolución da área e a estabilidade das superficies críticas.

Cando a variación considerada deixa de ser libre e pasa a estar suxeita a algunha restrición, o problema de puntos críticos convértese nun problema de extremos condicionados. Así, considerando variacións de superficies suxeitas a encerrar un volume constante, os puntos críticos correspóndense coas superficies de curvatura media constante. Dende un punto de vista físico, pola Lei de Laplace-Young a curvatura media dunha membrana que separa dous medios homoxéneos é proporcional á diferenza de presión a ámbolos dous lados da mesma. Así, cando a diferenza de presións é nula, a membrana ten curvatura media cero e constitúe unha superficie mínima, de onde se segue que as películas de xabón no espazo son exemplos de tales superficies. Cando esa diferenza de presión sexa constante pero non nula, a membrana debe tomar a forma dunha superficie de curvatura media constante, como é o caso das esferas. Así, as superficies minimais e de curvatura media constante están presentes non só en moitos problemas físicos ou químicos, senón tamén na base de moitas cuestións biolóxicas como se pon de manifesto na recente exposición [30].

Dende un punto de vista conforme, as superficies minimais en R^3 correspóndense coas inmersións harmónicas, polo que o seu estudo abrangue distintos campos da matemática coma a Análisise Complexa, a Xeometría Alxébrica ou a Topoloxía, a maiores da Xeometría de Riemann. A exposición presentada por Meeks e Pérez en [18] é especialmente reveladora da situación actual do estudo das superficies minimais.

Considerando a curvatura escalar dunha variedade riemanniana como o invariante escalar máis sinxelo da súa curvatura, as métricas de Einstein xorden como solucións das ecuacións de Euler-Lagrange para o funcional de Hilbert-Einstein

$$g \in \mathcal{M}_c \mapsto \int_M \tau_g dvol_g$$

restrinxido a variacións con volume constante dunha métrica dada, onde τ_g representa a curvatura escalar e $\mathcal{M}_c$ denota o espazo de métricas de volume constante sobre M . Así, as métricas de Einstein correspóndense con aquelas para as que a súa curvatura escalar está distribuída de maneira máis uniforme sobre a variedade. No caso máis xeral de considerar variacións arbitrarias (sen ningunha restrición sobre o volume), os puntos críticos do funcional veñen dados polas métricas Ricci-planas. Como xa mencionamos anteriormente, o funcional de Hilbert-Einstein é central non só en Xeometría Riemanniana, senón tamén en Relatividade Xeral, onde constitúe a base esencial da acción que dá lugar ás ecuacións de campo de Einstein.

As métricas de Einstein teñen curvatura seccional constante en dimensións baixas $n \leq 3$, polo que son localmente isométricas a esferas S^n, a espazos hiperbólicos H^n ou ao espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$. En dimensión superior, a existencia de métricas de Einstein é un problema aberto na actualidade cun importante número de conxecturas pendentes de resolución. A dimensión catro, ademais de ser o primeiro caso non trivial, presenta particularidades esenciais dado que existen obstrucións topolóxicas á existencia de métricas de Einstein en termos da característica de Euler, $\chi[M]$, e a sinatura da variedade, $\tau[M]$, determinadas pola desigualdade de Hitchin-Thorpe $\chi[M] \geq \frac{3}{2}|\tau[M]|$. Sábese que a desigualdade de Hitchin-Thorpe é só unha condición necesaria, pero non suficiente, para a existencia de métricas de Einstein en dimensión $n = 4$.

A construcción de métricas de Einstein é un problema sobredeterminado de difícil solución. Unha estratexia para construír tales métricas baséase na deformación conforme dunha métrica dada coa idea de atopar ou garantir a existencia dunha métrica de Einstein na clase conforme da métrica inicial. Así, unha variedade riemanniana n-dimensional (M, g) é *conforme Einstein* se existe unha deformación conforme $\bar{g} = \varphi^{-2}g$ de Einstein, o que é equivalente á existencia dunha solución positiva da ecuación

$$(n-2)Hes(\varphi) + \varphi\rho = \frac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau\}g.$$

Séguese do Teorema de Uniformidade que toda variedade de dimensión $n = 2$ é conforme Einstein ao ser localmente conformemente plana. Asemade, en dimensión tres o carácter conforme Einstein é equivalente ao localmente conformemente plano. Así, os primeiros exemplos non triviais aparecen en dimensión catro onde, a pesar de existir un bo número de resultados parciais, o contexto xeral está aínda lonxe de ser entendido. No marco da tese de doutoramento de Ixchel Gutiérrez Rodríguez analizamos a existencia de métricas conforme Einstein cun alto grao de simetría. A posibilidde de reducir a análise en catro dimensións a un problema afín de dúas dimensións foi explorada na tese de doutoramento de Xabier Valle Regueiro, o que permitíu obter resultados de clasificación baixo condicións da curvatura na clase conforme. A continuidade desta liña de traballo está especialmente motivada polas súas aplicacións na construción de modelos matemáticos aplicables na gravitación conforme.

Intimamente relacionado coa existencia de métricas conforme Einstein, o *problema de Yamabe* afirma a existencia dun representante con curvatura escalar constante en cada clase conforme. Toma o seu nome do matemático H. Yamabe, que afirmou ter unha proba deste resultado en 1960. Anos máis tarde, en 1968, descubriuse que a proba de Yamabe non era correcta, polo que o problema voltou á actualidade matemática. O traballo de Trudinger, Aubin e Schoen permitiu finalmente obter unha proba válida do que resultou ser un problema moito máis complexo do que inicialmente se podía imaxinar. A solución máis xeral foi obtida por Escobar en 1992, quen mostrou que a métrica de calquera variedade con borde podía ser deformada de maneira conforme nunha métrica con curvatura escalar constante para a cal a curvatura media do borde tamén era constante [10].

Os invariantes escalares de primeira orde da curvatura constitúen un espazo vectorial de dimensión un xerado pola curvatura escalar τ . Aumentando unha unidade a orde dos invariantes, estes constitúen un espazo catro-dimensional xerado por $\{\tau^2, |\rho|^2, |R|^2, \Delta\tau\}$, onde $|\rho|$ e $|R|$ son as normas do tensor de Ricci e o tensor de curvatura determinadas pola métrica do espazo, respectivamente. Da mesma maneira que o funcional de Hilbert-Einstein está asociado á curvatura escalar, teñen sido estudados funcionais asociados a invariantes escalares de segunda orde da curvatura como poden ser, a maiores das normas L^2 de determinados tensores curvatura, os invariantes de volume, o invariante de Chern-Gauss-Bonnet, o invariante espectral, etc. O estudo destes funcionais constitúe a base das ecuacións de campo de novas teorías gravitatorias como a Gravitación Conforme, a Gravitación Masiva e outras modificacións da Relatividade Xeral. Estos funcionais encádranse no estudo xeral de

$$S(g) = \int_M \tau_g^2 dvol_g \quad \text{e} \quad F_t(g) = \int_M \{|\rho_g|^2 + t\tau_g^2\}\, dvol\_g.$$

As ecuacións de Euler-Lagrange de tales funcionais, restrinxidos a variacións que manteñen o volume constante, ou para variacións libres en dimensión $n = 4$, foron establecidas por Berger en termos de sistemas sobredeterminados de ecuacións en derivadas parciais [2]:

$$Hes(\tau) - \frac{1}{n}\, \Delta\tau g - \tau\left(\rho - \frac{1}{\mathrm{n}}\tau g\right) = 0,$$

$$\Delta\, \rho - (2t+1)\, Hes(\tau) + \frac{2t}{\mathrm{n}}(\Delta\tau)g - \frac{2}{\mathrm{n}}(|\rho|^2 + t\tau^2)g + 2R[\rho] + 2t\tau g = 0.$$

Os funcionais F_t correspondentes aos valores $t = -1/3$ e $t = -1/4$ son equivalentes aos determinados polas normas L^2 do tensor de Weyl e o tensor de curvatura, respectivamente. O funcional $F_{-1/3}$ é especialmente relevante en Física pois determina a acción en Gravitación Conforme, onde as ecuacións de Euler-Lagrange veñen dadas pola anulación do tensor de Bach. O funcional $F_{-3/8}$ é relevante non só na acción das teorías de Gravitación Masiva, senón tamén dende un punto de vista xeométrico ao proporcionar unha caracterización variacional dos espazos de curvatura seccional constante, como mostraron Gursky e Viaclovsky en [14].

As métricas de Einstein son críticas para tódolos funcionais anteriores en dimensións tres e catro. A situación muda en dimensións $n \geq 5$, onde hai métricas Ricci-planas que non son críticas para ningún funcional F_t . Nestas dimensións é necesaria a condición máis forte de ser super-Einstein para garantir a criticalidade, o que mostra que todo espazo simétrico irreducible é crítico para todo funcional cuadrático da curvatura. Ao igual que acontece coas métricas de Einstein, a clasificación ou mesmo a existencia de métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura constitúe un problema aberto de difícil solución.

O noso traballo recente centrouse na clasificación de métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura baixo diferentes condicións de homoxeneidade, que constituíu o eixe central da tese de doutoramento de Sandro Caeiro Oliveira. Ademais, a procura destas métricas motivou recentemente a construción de novos fluxos xeométricos baseados nas correspondentes ecuacións de Euler-Lagrange. Tal é o caso do fluxo de Bach, cuxos solitóns constituíron un dos aspectos de estudo da tese de María Ferreiro Subrido.

5 Variedades con simetría: redución das EDP's

A simetría é un aspecto característico non só de formas xeométricas, senón tamén de sistemas de ecuacións, xunto con outros obxectos ou entidades abstractas. De modo xeral, dicimos que un obxecto é *simétrico* en relación a unha operación matemática prefixada se tal obxecto non cambia o seu aspecto ao ser aplicada esa operación sobre el. Asemade, dous obxectos serán simétricos respecto a un grupo de operacións se un deles pode transformarse no outro mediante tales operacións.

A simetría é unha noción omnipresente na nosa vida cotiá: dende os conceptos mesmos de beleza, onde a simetría e as proporcións teñen un papel esencial, ata os distintos campos científicos. Así, a simetría manifféstase en Bioloxía a través da distribución dos distintos organismos. A distribución corporal da maioría dos organismos pluricelulares mostra algún tipo de simetría que pode ser radial, bilateral ou doutro tipo. A simetría xeométrica das moléculas é a base de moitas das súas propiedades e o seu estudo é esencial na clasificación química das mesmas. A noción de simetría é ademais esencial en Física. De feito, en palabras do profesor P. W. Anderson [1], premio Nobel de Física no ano 1977,

"*It is only slightly overstating the case that physics is the study of symmetry*"

Prof. E. Noether
(1882-1935)

Prof. P. W. Anderson
(1923–2020)

Un exemplo da relevancia do concepto de simetría vén dado polo Teorema de Noether, que establece que calquera simetría diferenciable provén dun sistema físico que ten a súa correspondente lei de conservación. De maneira informal, a cada simetría (diferenciable) correspóndelle unha lei de conservación e viceversa. Este feito, que establece a conexión fundamental entre a simetría en Física e as leis de conservación, explica a invariancia de tales leis ao longo da evolución temporal dun sistema físico.

5.1 Simetría e curvatura

De acordo co Programa de Erlangen, publicado por Felix Klein en 1872, a xeometría é o estudo das propiedades dun espazo que son invariantes pola acción dun grupo de transformacións. O grupo de transformacións en Xeometría riemanniana está constituído polas isometrías da variedade, se ben en ocasións pode ter propiedades adicionais derivadas da existencia dalgunha estrutura engadida sobre a mesma.

As simetrías dunha variedade determinan a forma da mesma, o que se manifesta en propiedades da súa curvatura. Así, a curvatura seccional debe ser constante en cada variedade que acade o grao máximo de simetría (isto é, cando o grupo de isometrías teña dimensión máxima). A cuestión recíproca, consistente na determinación das simetrías a partir das propiedades da curvatura, é un problema activo na comunidade matemática. A modo de exemplo, os espazos de curvatura seccional constante S^n, R^n e H^n non só posúen o grupo de isometrías de maior dimensión, senón que este actúa de forma transitiva no seu fibrado esférico. Este feito formúlase en termos de dous conceptos xeométricos.

Homoxeneidade: Para calquera par de puntos $p, q \in M$ existe unha isometría Φ da variedade riemanniana que transforma un punto no outro, $\Phi(p) = q$. Así:

"A variedade ten a mesma forma en tódolos puntos".

Isotropía: Para calquera par de direccións determinadas por vectores unitarios $\vec{u}, \vec{v} \in T_p M$ no espazo tanxente a un punto $p \in M$ existe unha isometría Φ da variedade que, fixando ese punto $\Phi(p) = p$, transforma unha dirección na outra, $d\Phi_p(\vec{u}) = \vec{v}$ mediante a súa aplicación diferencial. Así:

"A variedade ten a mesma forma en tódalas direccións".

A propiedade de isotropía reflíctese no espectro dos operadores de Jacobi, que deben ter autovalores independentes do punto e a dirección considerada (o que se coñece como *propiedade de Osserman*). A pesar das moitas achegas acadadas dende o traballo fundacional de Chi en [5], a clasificación das variedades de Osserman é aínda un problema aberto [13]. A súa resolución completa semella moi complexa debido á existencia de variedades de Osserman que incumplen as dúas condicións de homoxeneidade mencionadas anteriormente. O estudo de distintos aspectos das variedades de Osserman foi o eixo central nas teses de doutoramento de Ramón Vázquez Lorenzo e, máis tarde, de José Carlos Díaz Ramos. Así como o operador de Jacobi reflicte o comportamento das xeodésicas, o operador de curvatura antisimétrico controla o comportamento dos círuclos. O estudo das súas propiedades espectrais foi abordado nas teses de doutoramento Esteban Calviño Louzao e Ali Haji Badali.

Dende un punto de vista diferente, aínda que estreitamente relacionado, nunha variedade homoxénea todos os invariantes escalares da curvatura son constantes. Tricerri, Prüfer e Vanhecke probaron que o recíproco é certo no caso riemanniano [27], co que é posible determinar a homoxeneidade local a partir da análise da curvatura.

5.2 Simetría e ecuacións

Unha simetría dunha ecuación é unha transformación que mantén invariante o conxunto de solucións. A análise das simetrías dun sistema de ecuacións é así un aspecto esencial cando se trata de resolver tales ecuacións, se ben a súa determinación pode ser moi complexa. O grupo de simetría dun sistema de ecuacións é o maior grupo de transformacións que actúa sobre o espazo de variables independentes do sistema coa propiedade de transformar unhas solucións noutras. O desenvolvemento destas ideas por Lie deu lugar á teoría de Grupos de Lie, que está na raíz de moitas cuestións matemáticas.

Dende outro punto de vista, a existencia de simetrías, tanto no dominio como nun sistema de ecuacións dado, permite reducir o número de variables do sistema e como resultado reducir o sistema dado a outro máis sinxelo. Na situación máis simple na que a variedade sexa homoxénea, este sistema pode chegar a reducirse a un sistema de ecuacións alxébricas. Así, as métricas de Einstein homoxéneas en dimensión catro foron clasificadas por Jensen, quen mostrou en [16] que tales espazos son necesariamente simétricos. O estudo dos correspondentes sistemas de ecuacións alxébricas pode ser abordado facendo uso de ferramentas de Álxebra Computacional como poden ser as bases de Gröbner.

Unha situación máis xeral, pero amplamente estudada, é aquela na que a variedade presenta un certo grao de cohomoxeneidade. As variedades riemannianas cun grao de cohomoxeneidade dado pódense caracterizar polo feito de estar foliadas polos conxuntos de nivel dos invariantes escalares da curvatura, onde a dimensión de tal foliación está determinada polo grao de cohomoxeneidade, como mostraron Console e Olmos en [6]. Así, cando a variedade dada é de cohomoxeneidade un, é moitas veces posible reducir un sistema de ecuacións en derivadas parciais a outro de ecuacións diferenciais ordinarias. Aínda así, as ecuacións resultantes non son de fácil resolución, pero sen dúbida algunha a simplificación do problema é moi relevante.

5.3 Simetría e homoxeneidade na curvatura

O feito de que as isometrías dun espazo preserven o tensor de curvatura (o que xeneraliza o Teorema Egregium de Gauss) fai que a estrutura alxébrica do tensor de curvatura sexa a mesma en tódolos puntos dun espazo homoxéneo. A cuestión recíproca ten dado lugar á noción de *homoxeneidade na curvatura*, que constitúe unha xeneralización dos espazos localmente homoxéneos.

A homoxeneidade dunha variedade conleva a existencia dun grupo de isometrías grande, isto é, de dimensión cando menos igual á da variedade, que actúa transitivamente sobre a mesma. En moitas ocasións ese grao de simetría permitiu probar un bo número de resultados que poden ser estendidos a situacións máis xerais baixo condicións máis febles de homoxeneidade na curvatura. Así, Derdzinski demostrou en [8] que as variedades riemannianas homoxéneas na curvatura de dimensión catro que cumpren a condición de Einstein son localmente simétricas, o que xeneraliza un resultado xa mencionado de Jensen no caso simétrico. Petersen e Wylie mostraron que os solitóns de Ricci gradientes homoxéneos son produtos de variedades de Einstein por espazos euclidianos [26]. Baixo a condición máis feble de homoxeneidade na curvatura tal resultado segue a ser certo, como amosamos fai pouco en [11], o que constitúe unha mostra da utilidade práctica da propiedade de homoxeneidade na curvatura.

6 Onde imos?

Ao longo deste discurso tentei reflexar algúns aspectos da investigación matemática desenvolvida arredor da curvatura en Xeometría Riemanniana. A necesidade de avanzar no coñecemento do mundo próximo levou ás antigas civilizacións a iniciar o estudo da xeometría plana. Máis tarde, a necesidade de representar a Terra na que vivimos motivou a creación de técnicas cartográficas relacionadas coa xeometría esférica. O desenvolvemento das xeometrías non euclidianas e o nacemento da Xeometría riemanniana durante o século XIX finalmente levaron á formulación da Relatividade Xeral a principios do século XX. Durante o último século e especialmente dende o inicio do presente, tense avanzado de maneira espectacular na comprensión de problemas profundos nos que se mesturan aspectos xeométricos, topolóxicos e analíticos.

O avance do coñecemento matemático permitiu ao longo deste devir histórico mellorar as nosas vidas de maneira impensable. O funcionamento preciso dos sitemas GPS dependen da teoría da relatividade e a súa base matemática. Calquera transacción electrónica segura utiliza protocolos de seguridade baseados na criptografía, que xurdiu como unha aplicación da teoría de números. Os avances médicos do último século teñen unha base matemática derivada non só da estatística, a modelización e a análise de Fourier, senón tamén de campos en principio máis teóricos coma a Xeometría Integral, que persegue a estimación cuantitativa de parámetros (volume, área, etc.) a partir de seccións ou proxeccións. É a base sobre a que se sustentan técnicas como as ecografías ou a tomografía computerizada.

As persoas que centramos a nosa investigación nas Matemáticas debemos colaborar con investigadores de calquera campo onde as ferramentas matemáticas sexan precisas. Necesitaremos polo tanto novas xeracións de persoal docente e investigador nas universidades e centros de investigación, que sexan capaces de xerar e transmitir coñecemento. Esta foi a razón da creación do Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga), que aglutina a investigadores do Sistema Universitario Galego dedicados tanto á investigación básica como á transferencia de coñecemento. A dotación de medios humanos e materiais é esencial se pretendemos situar a Galicia na fronteira do coñecemento.

Gustaríame concluír con dúas reflexións.

Como profesor universitario, a docencia é un dos aspectos centrais da miña actividade. Mentres que todos estamos a asumir o papel das novas tecnoloxías na investigación, a actividade docente non parece amosar unha evolución paralela. Nos últimos anos as ferramentas, tanto de cálculo simbólico e representación como de comunicación, promoven un cambio de paradigma nos contidos da actividade docente. Non se trata só de ensinar coñecemento, senón de ensinar destrezas e amosar como adquirir competencias. No noso campo, o enfoque á resolución de problemas é fundamental, pese a que resulta moito máis complexo. A docencia teórica e o traballo de abstracción, amplamente maltratados nos últimos anos, son esenciais se queremos achegarnos ás bases dos problemas. Non se trata de memorizar resultados, procesos ou demostracións, senón de entender o porqué das cousas. Esa é, de feito, a base das nosas inquedanzas como científicos.

Como investigador en ciencia básica moitas veces teño sufrido o enfrentamento ou contraposición entre ciencia básica e aplicada. A investigación e a transferencia de coñecemento deben considerarse non como actividades opostas, senón complementarias. Sen dúbida temos que ser conscientes das posibles aplicacións prácticas do noso traballo e a súa influencia no desenvolvemento socioeconómico da sociedade na que vivimos, pero tamén temos que ter presente que toda aplicación práctica xorde do estudo previo de cuestións científicas básicas. Luis A. Santaló, un dos matemáticos españois máis amplamente recoñecidos a pesar de terlle tocado vivir o período máis aciago da nosa historia recente, nun traballo sobre probabilidades xeométricas fai a seguinte reflexión que considero axeitada para calquera ámbito científico [29]:

"Las Probabilidades Geométricas y sus sucesivos desarrollos hacia la Geometría Integral y la Geometría Estocástica constituyen un ejemplo típico de cómo se originan y evolucionan muchas teorías matemáticas, y aún la matemática misma en su totalidad.

Se empieza por cuestiones de ingenio o curiosidad. Reciben luego la influencia de otras partes de la matemática, que apoyan su desarrollo y les proporcionan el lenguaje y estructura necesarios, estableciéndose una interacción a través de la cual las nuevas ideas se benefician de las ya existentes y éstas, a su vez, consiguen nuevos puntos de vista útiles para iluminar y fortalecer sus propios problemas.

Cuando ya la teoría tiene cuerpo propio aparecen las aplicaciones, que a veces no salen de la matemática misma, y otras veces resultan insospechadas y de interés para ramas muy diversas de la ciencia o de la técnica".

As matemáticas son unha das áreas da ciencia onde o obxectivo final é coñecer a *razón última das cousas*, e non elaborar retóricas ou manipular datos, feitos ou argumentos para conducir o discurso cara ao que a un lle poida interesar. As colaboracións matemáticas fundaméntanse no interese de chegar á verdade, algo que non se dá con frecuencia noutras disciplinas (onde pode haber presupostos que se queiran demostrar ou validar), e moito menos no noso día a día, na política, nas relacións interpersoais, etc. onde os intereses a miúdo dominan sobre a razón e a correcta argumentación. Potenciar as matemáticas é potenciar non só a imaxinación e a correcta argumentación sobre obxectos abstractos (moitos dos cales parecen non ter unha aplicación práctica, aínda que a miúdo si a acaben tendo), senón tamén potenciar unha forma de confrontar ideas entre seres humanos de xeito que sexa sempre o mellor argumento -e non a mellor manipulación, falacia ou imposición de intereses- o que resulte vencedor.

Finalizo reiterando o meu agradecemento á Real Academia Galega de Ciencias. Espero estar á altura que a posición de académico esixe e que a miña aportación axude a consolidar as apostas da RAGC.

Referencias

[1] P. W. Anderson, More Is Different, *Science* **177** (1972), 393–396.
[2] M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), no. 4, 285–294.
[3] S. Brendle, R. Schoen, Manifolds with $1/4$-pinched curvature are space forms, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), 287–307.
[4] S.-Y. Chang, M. J. Gursky, P. Yang, Conformal invariants associated to a measure, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103** (2006), 2535–2540.
[5] Q. S. Chi, A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces, *J. Diff. Geom.* **28** (1988), 187–202.
[6] S. Console, C. Olmos Level sets of scalar Weyl invariants and cohomogeneity *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), 629–641.
[7] P. Le Corbeiller, The Curvature of Space, *Scientific American* **191** (1954), 80–87.
[8] A. Derdzinski, Einstein metrics in dimension four, *Handbook of differential geometry* **I**, 419–707. North-Holland, Amsterdam, 2000
[9] J. Eells, J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *American J. Math.* **86** (1964),109–160.
[10] J. F. Escobar, Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary, *Ann. of Math. (2)* 136 (1992), 1-50.
[11] M. Fernández-López, E. García-Río, On gradient Ricci solitons with constant scalar curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016), 369–378.
[12] E. García-Río, D. N. Kupeli, B. Unal, On a differential equation characterizing Euclidean spheres, *J. Differential Equations* **194** (2003), 287–299.
[13] E. García-Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Lect. Notes Math. **1777**, Springer, Berlin, 2002.
[14] M. J. Gursky and J. A. Viaclovsky, A new variational characterization of three-dimensional space forms, *Invent. Math.* **145** (2001), 251–278.
[15] R. S. Hamilton, Three Manifolds with Positive Ricci Curvature, *J. Diff. Geom.* **17** (1982), 255–306.
[16] G. R. Jensen, Homogeneous Einstein Spaces of Dimension Four, *J. Diff. Geom.* **3** (1969), 309–349.
[17] J. Lauret, Finding solitons, *Notices Amer. Math. Soc.* **67** (2020), 647–657.

[18] W. H. Meeks III, J. Pérez, The classical theory of minimal surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (2011), 325–407.

[19] O. Müller, M. Sánchez, Lorentzian manifolds isometrically embeddable in L^N, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 5367–5379.

[20] J. F. Nash, The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Annals of Mathematics* **63** (1956), 20–63.

[21] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 333–340.

[22] R. Osserman, Curvature in the Eighties, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 731–756,

[23] G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv:math/0307245.

[24] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math/0303109.

[25] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math/0211159.

[26] P. Petersen, W. Wylie, On gradient Ricci solitons with symmetry, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2085–2092.

[27] F. Prüfer, F. Tricerri, L. Vanhecke, Curvature invariants, differential operators and local homogeneity *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 4643–4652.

[28] J. H. Rubinstein, R. Sinclair, Visualizing Ricci flow of manifolds of revolution, Experimental Math. **14** (2005), 285-298.

[29] L. A. Santaló, Probabilidades geométircas, geometría integral y geometría estocástica: aplicaciones, *Gaceta RSME* **1** (1998), 159–189.

[30] B. Schamberger *et al*, Curvature in Biological Systems: Its quantification, emergence, and implications across the scales, *Adv. Mater.* **35** (2023), 2206110.

[31] As fotos e debuxos deste discurso foron obtidas a través de *wikipedia* ou do *Oberwolfach Photo Collection*.

CITMAga, Facultade de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela, 15782 Santiago de Compostela